معرفی مدلهای احتمال سریهای زمانی غیر فصلی

مقدمه

در سری های زمانی سعی می کنیم با بررسی گذشته سری، الگوی احتمالی مولد داده ها را شناسایی کرده و بر مبنای این الگودرباره رفتار آینده سری اظهار نظر نماییم. مدل احتمالی ای که به سری برازش داده می شود باید بتواند به نحو مناسبی مشاهدات سری را مدل سازی کند. برای بررسی اینکه آیا یک مدل احتمالی واقعا توصیف کننده داده ها است یا خیر، می توان خطاهای پیش بینی را موردتجزیه و تحلیل قرار داد. اگر مدلی به نحو رضایتبخشی نماینده فرآیند باشد، آنگاه انتظار می رودمقدار متوسط خطاهای پیش بینی نزدیک صفر باشد.

تجزیه و تحلیل سریهای زمانی اصولا با ارزیابی کردن خواص مدل احتمالی که سری مشاهده شده را تولید می نماید سروکاردارد. بنابراین ابتدا بایداین مدل های احتمالی را بخوبی شناخت.اکنون مهمترین فرآیندهای تصادفی که در مبحث سری های زمانی کاربرد دارند را به اختصار معرفی می کنیم. ابتدا لازم است فرآیند تصادفی محض را معرفی نمائیم. در یک تقسیم بندی کلی سری های زمانی را به دو رده فصلی و غیر فصلی تقسیم می کنیم. ما در این مقاله مدلهای غیرفصلی (ایستا و ناایستا) را مطالعه می کنیم.

معرفی فرآیند تصادفی محض

فرآیندگسسته $\{z_t\}$ یک فرآیند تصادفی محض یا اغتشاش خالص نامیده می شود، اگر متغیرهای تصادفی $\{z_t\}$ بصورت دنباله ای از متغیرهای دو به دو مستقل و هم توزیع باشند. این فرآیند که مهندسین گاهی آنرا white noise یا سروصدای سفید می نامند، یک فرآیند ایستا است. زیرا میانگین و تابع اتوکوواریانس آن به زمان بستگی ندارد. فرآیند تصادفی محض به تنهایی کاربرد ندارد و از آن بعنوان جزء تشکیل دهنده فرآیندهای پیچیده تر استفاده می شود.

۱- مدل اتورگرسیو مرتبه P یا AR(P)

این مدل بصورت زیر تعریف می شود:

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + ... + \alpha_p x_{t-p} + z_t$$

که $\{z_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_z^2 است. همانطور که ملاحظه می شود x_t ترکیبی خطی از جدیدترین p مقدار گذشته خودش بعلاوه یک جمله اغتشاش z_t است که هر چیز تازه ای در زمان t که بوسیله مقادیر گذشته بیان نشده است را در سری منظور می کند. بنابراین فرض می کنیم z_t مستقل از $x_{t-1}, x_{t-2}, ...$ است.

فرآیند AR(P) را می توان بااستفاده از عملگر پسرو به شکل ساده تر زیر نوشت:

$$\varphi(B) x_t = z_t$$

$$\varphi(B) = 1 - \alpha_1 B - \alpha_2 B^2 - .... - \alpha_p B^P$$

چنانچه میانگین فرآیند مخالف صفر باشد، آن را به شکل زیر می نویسیم:

$$\varphi(B)(x_t - \mu) = z_t$$

معمولا فرآیند AR با میانگین غیرصفر را بصورت زیر می نویسیم:

$$\varphi(B) x_t = \theta_0 + z_t$$

که θ_0 را می توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$\theta_0 = (1 - \alpha_1 B - ... - \alpha_p B^p)\mu = (1 - \alpha_1 - ... - \alpha_p)\mu$$

چند نکته

۱- به لحاظ نظری شرط ایستایی فرآیند AR(p) آن است که ریشه های معادله مشخصه آن یعنی ریشه های چند جمله ای $\varphi(B)$ از لحاظ قدر مطلق بزرگتر از یک باشند(خارج از دایره واحد قرار داشته باشند). بنابراین ایستایی این فرآیند بستگی به ضرایب α دارد.

۲- فرآیند اتورگرسیو تقریبا مانند مدل رگرسیون چندگانه است، با این تفاوت که x_t روی متغیرهای مستقل رگرسیون نشده است بلکه روی مقادیر گذشته خودش رگرسیون شده است. به همین جهت این فرآیند را اتورگرسیو می نامند.

۳- یکی از ویژگیهای فرآیند AR(P) این است که pacf آن بعداز فاصله p قطع می شود. یعنی تابع خود همبستگی جزیی آن بلافاصله پس از تأخیر p صفر می شود.

۴- به طورکلی در فرآیندهای AR فرض بر این است که مقدار حال یک سری زمانی به مقادیر بلافاصله گذشته آن همراه با یک خطای تصادفی بستگی دارد.

۱-۱ مدل اتورگرسیو مرتبه اول (فرآیند مارکف)

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول که به شکل $x_t = \alpha x_{t-1} + z_t$ است را فرآیند مارکف می نامند. این فرآیند ایستا است اگر $|\alpha| < 1$؛ این شرط هم ارز است با اینکه بگوییم ریشه معادله $(1-\alpha B) = 0$ خارج از دایره واحد واقع شود.

فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول را می توانیم با جایگزینی های متوالی بصورت زیر بنویسیم :

$$x_t = \alpha(\alpha x_{t-2} + z_{t-1}) + z_t = \alpha^2(\alpha x_{t-3} + z_{t-2}) + \alpha z_{t-1} + z_t$$

با ادامه این روند، می توان x_t را بصورت یک فرآیند MA از مرتبه نامتناهی به شکل زیر بیان کرد. فرآیند MAدر ادامه معرفی خواهد شد.

$$x_t = z_t + \alpha z_{t-1} + \alpha^2 z_{t-2} + \dots$$

در فرآیند اتورگرسیو مرتبه اول به ازای $\alpha = 1$ فرآیند جدیدی بدست می آید که آن را **فرآیند گام برداری تصادفی** می نامند. این فرآیند که به شکل $x_t = x_{t-1} + z_t$ است بیان می کند که مشاهده در هر مرحله فقط به مشاهده در یک مرحله قبل بعلاوه یک خطای تصادفی بستگی دارد.

z_t را که همان فرآیند اغتشاش خالص می باشد، به عنوان اندازه گام هایی که در زمان t به عقب یا جلو برداشته ایم تعبیر می کنیم. x_t نیز موقعیت گام بردارنده تصادفی در زمان t می باشد. قیمت سهام، مثالی از سری های زمانی است که رفتارش بسیار شبیه گام برداری تصادفی می باشد.

خطای تصادفی+ قیمت آن سهم در روز (t-1) = قیمت یک سهم در روز t

فرآیندگام برداری تصادفی یک فرآیند ناایستا است. اما تفاضلهای مرتبه اول آن یک فرآیند تصادفی محض به شکل $z_t = x_t - x_{t-1}$ را می سازد که ایستا می باشد.

۲- مدل میانگین متحرک مرتبه q یا MA(q)

این مدل بصورت زیر تعریف می شود:

$$x_t = z_t + \beta_1 z_{t-1} + ... + \beta_q z_{t-q}$$

که $\{z_t\}$ فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر و واریانس σ_z^2 است.

این فرآیند را بااستفاده از عملگر پسرو می توان به شکل ساده تر زیر نوشت:

$$x_t = \theta(B) z_t$$

$$\theta(B) = 1 + \beta_1 B + \beta_2 B^2 + ... + \beta_q B^q$$

چنانچه میانگین این فرآیند مخالف صفر باشد می توان جمله ثابت μ را به طرف راست معادلات فوق اضافه کرد.

$$x_t = \mu + \theta(B) z_t$$

یا

$$x_t = \theta_0 + \theta(B) z_t$$

که $\theta_0 = \mu$

چند نکته

۱– این فرآیند بدون توجه به مقادیر وزنهای $\{\beta_i\}$ همواره ایستا است.

۲– تابع خود همبستگی فرآیند MA(q) بعد از تأخیر q قطع می شود. یعنی تابع خودهمبستگی آن برای مقادیر بزرگتر از q صفر خواهد بود.

۳– یک فرآیند MA از مرتبه متناهی را می توان به یک فرآیند AR از مرتبه نامتناهی تبدیل کرد، در صورتی که ریشه های چندجمله ای $\theta(B)$ خارج از دایره واحد باشند. همینطور می توان یک فرآیند AR از مرتبه متناهی را بدون هیچ شرطی به یک فرآیند MA از مرتبه نامتناهی تبدیل کرد.

۴– شرط تبدیل پذیری (وارون پذیری) برای فرآیند MA(q) معادل است با شرط ایستایی برای فرآیند AR(p) . بنابراین فرآیند MA(q) وارون پذیر است اگر و فقط اگر ریشه های معادله مشخصه آن از لحاظ قدر مطلق بیشتر از یک باشند.

۵– یک فرآیند MA را نمی توانیم بطور منحصر بفردی از روی acf آن مشخص کنیم، مگر اینکه آن فرآیند وارون پذیر باشد. در واقع گنجاندن شرط وارون پذیری ما را مطمئن می سازد که برای هر acf معلومی یک فرآیند میانگین متحرک یکتا وجود دارد.

۶– فرآیندهای میانگین متحرک در توصیف پدیده هایی مفید هستند که در آنها، پیشامدها یک اثر آنی را تولید می کنند که برای دوره های زمانی کوتاه باقی می ماند.

۷– فرآیندهای اتورگرسیو و میانگین متحرک تاحدودی معادلند و انتظار می رود که وقتی مدلی با مرتبه پایین از یک نوع به حد کافی یک سری را تشریح می کند، مدل نوع دیگر با مرتبه بالاتر نیز چنین باشد. با وجود این، ما مایلیم با توجه به اصل امساک(صرفه جویی در پارامترها) مدل دارای پارامترهای کمتر را انتخاب کنیم.

۳ – مدل مرکب یا ARMA(p,q)

فرآیندهای اتورگرسیو- میانگین متحرک یا ARMA(p,q)که آنها را فرآیندهای مرکب نیز می نامیم، از ترکیب دو فرآیند پیشین بدست می آید. این فرآیند شامل p جمله AR و q جمله MA می باشد و بصورت زیر نوشته می شود:

$$(1-\alpha_1 B-......-\alpha_p B^P)(x_t-\mu)=(1+\beta_1 B+.......+\beta_q B^q)z_t$$

یا

$$\varphi(B)(x_t-\mu)=\theta(B)z_t$$

که $\varphi(B)$ و $\theta(B)$ بصورت زیر تعریف می شوند :

$$\varphi(B)=1-\alpha_1 B-\alpha_2 B^2-....-\alpha_P B^P$$

$$\theta(B)=1+\beta_1 B+\beta_2 B^2+....+\beta_q B^q$$

مدل ARMA(p,q) را بصورت زیر نیز می توان نوشت:

$$\varphi(B)x_t=\theta_0+\theta(B)z_t$$

$$x_t=\theta_0+\alpha_1 x_{t-1}+.......+\alpha_p x_{t-p}+z_t+\beta_1 z_{t-1}+.......+\beta_q z_{t-q}$$

$$\theta_0=(1-\alpha_1 B-...-\alpha_p B^p)\mu=(1-\alpha_1-...-\alpha_p)\mu$$

چند نکته

۱- شرط ایستایی فرآیند مرکب ARMA آن است که مقادیر $\{\alpha_i\}$ به گونه ای باشند که ریشه های $\varphi(B)=0$ خارج دایره واحد واقع شوند.

۲- شرط وارون پذیری این فرآیند آن است که مقادیر $\{\beta_i\}$ به گونه ای باشند که ریشه های $\theta(B)=0$ خارج دایره واحد واقع شوند.

۳- اغلب می توان یک سری زمانی ایستا را با یک مدلARMA بیان نمود که نسبت به مدلهای MA یا AR(به تنهایی)، پارامترهای کمتری دارد.

۴- برای فرآیند ARMA(p,q) ، q تأخیر اول تابع خود همبستگی تحت تأثیر پارامترهای میانگین متحرک و تأخیرهای بزرگتراز q تنها تحت تأثیر پارامترهای اتورگرسیو خواهند بود. بعلاوه تابع خود همبستگی یک فرآیند مرکب بعد از نخستین $q-p$ فاصله، بصورت مخلوطی از جملات نمائی و جملات با میرائی سینوسی می باشد. بالعکس در تابع خود همبستگی جزئی بعد از نخستین $p-q$ فاصله غلبه با مخلوطی از جملات نمائی و جملات با میرائی سینوسی است.

۴- مدل ARIMA(p,d,q)

یک مدل کلی که توانایی نمایندگی طبقه گسترده ای از سری های زمانی ناایستا را دارد فرآیند تلفیقی اتورگرسیو- میانگین متحرک با درجه (p,d,q) است. با توجه به اینکه در عمل بیشتر سری های زمانی ناایستا هستند، لذا این رده از فرآیندها کاربرد گسترده ای دارند. این فرآیند را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$\varphi(B)\nabla^d x_t=\theta_0+\theta(B)z_t$$

یا

$$\varphi(B)w_t=\theta_0+\theta(B)z_t\,;\quad w_t=\nabla^d x_t$$

اگر معادله فوق را باز کنیم خواهیم داشت:

$$w_t=\alpha_1 w_{t-1}+......+\alpha_p w_{t-p}+z_t+\beta_1 z_{t-1}+......+\beta_q z_{t-q}$$

سری $\{w_t\}$ با d مرتبه تفاضلی کردن سری اصلی $\{x_t\}$ بدست آمده است.

پارامتر θ_0 برای $d=0$ و $d>0$ نقشهای متفاوتی را بازی می کند. اگر $d=0$ فرآیند اولیه ایستا است و θ_0 به میانگین فرآیند وابسته است، یعنی $\theta_0=\mu\varphi(B)$. با این وجود وقتی $d\geq 1$، θ_0 را جمله روند قطعی می نامند. معمولا فرض می کنیم $\theta_0=0$ باشد. مگر اینکه داده ها خلاف آن را نشان دهند.

برای یک مدل ARIMA(p,d,q) با $w_t = \nabla^d x_t$ فرآیند ARMA(p,q) ایستا می باشد.

۴-۱ مدل IMA (d, q)

یک فرآیند ARIMA که جملات اتو رگرسیو نداشته باشد فرآیند IMA(d,q) نامیده می شود که بیانگر مدل میانگین متحرک تلفیق شده است. مدل ساده IMA(۱,۱) معرف بسیاری از سری های زمانی رضایتبخش می باشد. بخصوص سریهایی که در اقتصاد و کسب و کار رخ می دهند. این مدل به شکل زیر است:

$$x_t = x_{t-1} + z_t + \beta z_{t-1}$$

یا

$$(1-B)x_t = (1+\beta B)z_t$$

۴- ۲ مدل ARI (p, d)

یک فرآیندARIMA که جملات میانگین متحرک نداشته باشد فرآیند ARI(p,d) نامیده می شود. فرآیند ARI(۱,۱) بصورت زیر نوشته می شود:

$$(1-\alpha B)\nabla x_t = z_t$$
$$(1-\alpha B)(x_t - x_{t-1}) = z_t$$
$$x_t - x_{t-1} = \alpha(x_{t-1} - x_{t-2}) + z_t$$
$$x_t = (1+\alpha)x_{t-1} - \alpha x_{t-2} + z_t$$

که در آن $|\alpha| < 1$.

پایان.

توضیحات:

مطالب فوق بخشی از کتاب " تجزیه و تحلیل سریهای زمانی با نرم افزار مینی تب" اثر مصطفی خرمی و دکتر ابوالقاسم بزرگنیا می باشد .علاقه مندان به یادگیری تکنیکها و روشهای تحلیلی و پیش بینی

سریهای زمانی و آموزش عملی با نرم افزار مینی تب می توانند نسخه الکترونیک این کتاب را به راحتی از فروشگاه اینترنتی شرکت داده پردازی آماری اطمینان شرق به نشانی:

http://spss-iran.ir/eshop.php، دریافت نمایند.

این کتاب دارای ۳۵۰ صفحه می باشد و مبحث سریهای زمانی را با جزئیات کامل در قالب حل مثالهای واقعی و متنوع در نرم افزار مینی تب توضیح می دهد. برای آشنایی بیشتر با این کتاب، فصول و فهرست مطالب و صفحات اول آنرا می توانید بصورت رایگان از لینک زیر دانلود نمائید.(کافیست در کیبرد سیستم خود کلید ctrl را فشار داده و روی لینک زیر کلیک نمائید و پیغام نمایش داده شده را تائید کنید.)

دانلود فهرست مطالب و نام فصول کتاب : تجزیه و تحلیل سریهای زمانی با نرم افزار مینی تب